



UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (1) 39 63 55 11

# Rapports de Recherche

N° 997

*Programme 7*

## RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC DES ELEMENTS FINIS EXTREMEMENT MINCES DANS LA COUCHE LIMITE

Mario A. D'ERRICO

Février 1989



3027

# RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC DES ELEMENTS FINIS EXTREMEMENT MINCES DANS LA COUCHE LIMITE

Mario A. D'Errico  
INTEC \* - INRIA \*\*

## RESUME

*La simulation d'écoulements visqueux et laminaires pose des problèmes à très grand nombre de Reynolds à cause des couches limites. On propose ici une nouvelle façon de résoudre le système linéaire issu d'une discrétisation par éléments finis des équations de Navier-Stokes instationnaires, incompressibles et laminaires. Il consiste à traiter la partie du système correspondant à la couche limite avec une méthode de relaxation par blocs de façon à imiter la résolution des équations paraboliques de la couche limite de Prandtl. On présente des résultats sur une plaque plane et un profil d'aile à  $Re=10^5$  et  $10^6$ . On montre que la méthode évite les propagations d'erreurs d'arrondis due au mauvais préconditionnement du système linéaire global.*

## NUMERICAL SIMULATION OF LAMINAR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW WITH EXTREMELY THIN FINITE ELEMENTS NEAR THE BOUNDARIES.

## ABSTRACT

Viscous and laminar flow simulations is a source of problems at very high Reynolds number ( $Re$ ) because of the boundary layers. Discretization grids extremely thin are needed in the perpendicular direction to the boundary layer and that produces a bad, or at least mediocre, conditioning of the linear systems. We propose here, not a new approximation in order to solve the problem, but a new way of resolving the linear system that arises from a finite element discretization of the nonstationary, incompressible and laminar Navier-Stokes equations. It is a simple idea that consists in changing the method of resolution in the boundary layer by a bloc relaxation method, adapted to physics, that imitates the the method of resolution of the parabolics Prandtl boundary layer equations, while in the remaining domain a Cholesky or conjugate gradient method is employed. The global linear system is solved by blocs. The first corresponds to the boundary layer and wake; the second corresponds to the remaining domain. We have obtained better results on a wing profile at Reynolds number 100 000 because this method seems not to propagate the round off errors due to the bad conditionning of the global linear system.

\*INTEC : Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química.  
(Grupo de Mecánica Computacional) Santa Fe - Argentina)



"x" étant la direction de l'écoulement et "y" la direction perpendiculaire. Les eqs. (3) peuvent être résolues par une méthode de différences finies en marchant dans le sens de l'écoulement : si la solution à l'abscisse  $x_1$  est connue, on calcule la solution à  $x_1 + \Delta x$  en résolvant un système linéaire en  $y$  (Rosenhead [1], chapitre 6, section 10); puisqu'il s'agit d'une EDP parabolique en  $x$ .

Dans le présent travail on propose une résolution par blocs du système linéaire issu de (1) : on décompose le système linéaire global, correspondant à tout le domaine, en deux blocs, correspondants à deux sous-domaines. Un qui représente la solution dans la couche limite plus sillage, et l'autre qui représente la solution dans le reste du domaine. Le premier, correspondant à la couche limite, est résolu par une méthode de relaxation par blocs, où chaque bloc correspond à toutes les inconnues sur une section perpendiculaire à l'écoulement (équivalent à une abscisse  $x$  fixe en (3)) et la relaxation est faite dans le sens de l'écoulement (équivalent à marcher sur  $x$  en (3)).

Le second, correspondant au reste du domaine, est résolu par la méthode de Cholesky ou gradient conjugué.

On est parti d'un code de calcul des solutions des équations bidimensionnelles de N.S. incompressible en éléments finis avec décentrage par caractéristique.

On a testé l'algorithme sur une plaque plane et sur un profil d'aile et on a comparé les résultats avec ceux du programme original. On a obtenu d'excellents résultats dans l'exemple de la plaque plane. A  $Re=10^6$  l'algorithme proposé permet d'atteindre une solution que le code original ne peut pas calculer. On a comparé la trainée avec la valeur théorique et on a vérifié une bonne corrélation.

Dans le cas du profil d'aile les résultats obtenus sont moins bons, bien que meilleurs que ceux obtenus avec le code original. Ici on n'a pas pu faire des comparaisons de trainée, faute de solution analytique. On compare seulement avec le programme original.

Un fait à noter est la robustesse du programme original qui permet d'obtenir des résultats pas trop mauvais à  $Re=100.000$  alors que on s'attendait à pire, compte tenu du mauvais conditionnement prévu des systèmes linéaires.

## RAPPEL DE LA METHODE DE BASE

Le programme de base sur lequel s'est effectué le travail est le module NSQ2CA (Hecht-Cardot [6]) d'éléments finis, qui utilise une formulation variationnelle dans une base à divergence nulle (Hecht [7]) et une discrétisation de la dérivée totale par la méthode de caractéristiques (Pironneau [8]).

Il faut résoudre, à chaque pas de temps, l'équation suivante (voir ref. [6] pour plus de détails) :

$$(u_h^{k+1}, v_h) + \frac{\nu \Delta t}{2} \cdot (\text{grad } u_h^{k+1} + \text{grad}^T u_h^{k+1}, \text{grad } v_h^{k+1} + \text{grad}^T v_h^{k+1}) = (u_h(X^k), v_h) \quad (4)$$

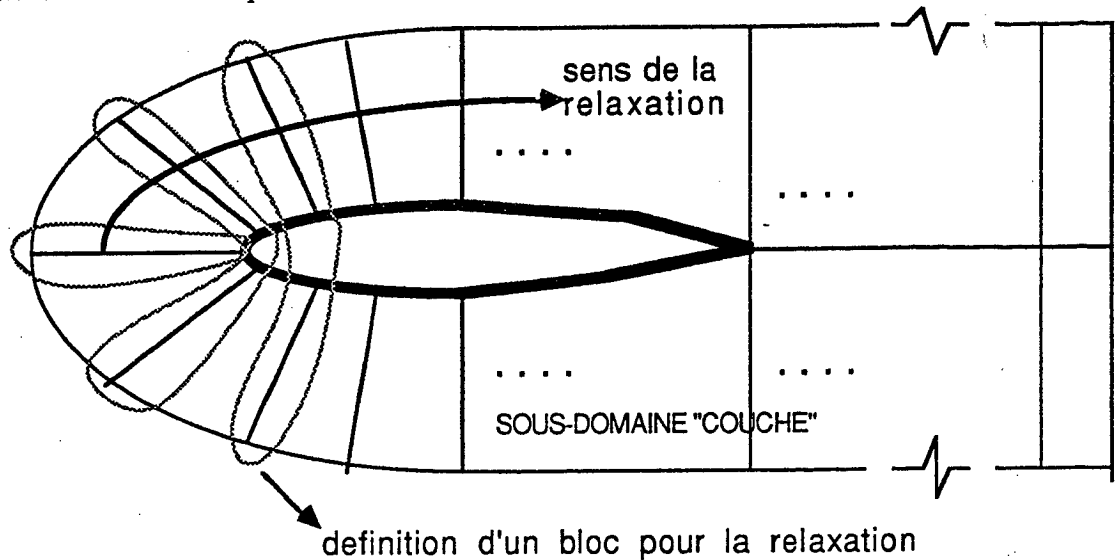
$$u_h^{k+1}|_{\Gamma} = u_{\Gamma} \quad \text{pour tout } v_h \in V_{0h}$$

où  $X^k = X_{(x, k\Delta t)}$  approche la solution, intégrée dans le sens du temps décroissant, de :

$$\frac{dX}{d\tau} = u(X, \tau) \quad \text{avec la condition initiale : } X_{(x, (k+1)\Delta t)} = x$$

Dans la pratique, cela revient à résoudre le système linéaire :

suivante, de façon à imiter la solution progressive dans le sens de l'écoulement comme on le fait avec les équations de la couche limite de Prandtl :



### IMPLEMENTATION

Le sous-système "exterieur" (7.1) peut être résolu, en principe, par une méthode quelconque car il ne pose pas de problème au point de vu conditionnement. Ici on a profité de la factorisation de Cholesky implementée dans le code original, mais on a essayé aussi une méthode de gradient conjugué. Pour Cholesky on stocke seulement la matrice triangulaire inférieure  $L$  issue de la factorisation  $L.L^T$  du bloc diagonal "exterieur"  $A_{22}$ . Il est stocké sous forme profil avec un seul pointeur necessaire, ce qui correspond au code original. Pour le gradient conjugué, il faut seulement savoir calculer  $A_{22}.u$  à  $u$  donné et on stocke  $A_{22}$  sous forme "morse" (Modulef [9]), deux pointeurs, de file et de colonne, étant necessaires.

La résolution du sous-système "couche" (7.2), écrit simplifié comme

$$A_{11}.u_1 = f_1$$

est la plus critique, car sensible à la méthode employée. On utilise donc une méthode itérative de relaxation par blocs, robuste devant un éventuel conditionnement médiocre de la matrice du système.

Alors  $A_{11}$  est décomposée de la façon suivante :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \dots B_{1i} & \dots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{i1} \dots & B_{ii} \dots & B_{ij} \dots & B_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{p1} \dots & & \dots & B_{pp} \end{vmatrix} \quad (10)$$

et les vecteurs  $u_1$  et  $f_1$  comme :

$$u_1 = [x_1 \dots x_i \dots x_p]^T \quad \text{et} \quad f_1 = [g_1 \dots g_i \dots g_p]^T$$

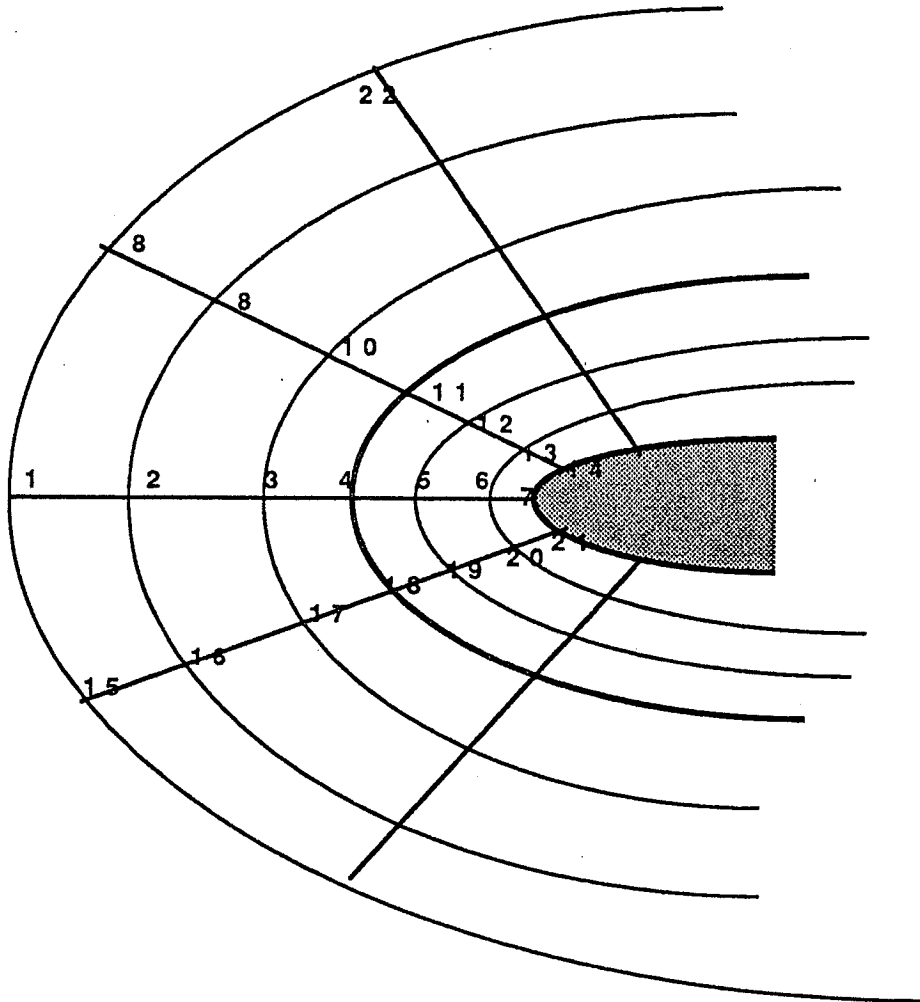
où  $p$  est le nombre de blocs (voir plus bas pour la définition de chaque bloc), de dimension  $> 1$ .

coupes et la numérotation des blocs est croissante dans le sens de l'écoulement (voir dessin plus haut).

Pour le sous-domaine "exterieur", il ne reste qu'à numérotter les noeuds ; on a choisi de faire comme suit mais il faut reconnaitre que c'est loin d'être optimal :

ayant obtenu une numérotation optimale pour le domaine complet, on assigne ensuite aux noeuds du sous-domaine "exterieur" seul, une numérotation qui suit l'ordre de la numérotation globale optimale mais de façon à être consécutive au numéro du dernier noeud du sous-domaine "couche".

Par exemple, si la numérotation globale optimale est :



et la numérotation finale du sous-domaine "couche" est :

Le gros bloc hors de la diagonale  $A_{12}$ , nécessaire pour le calcul des deux seconds membres de (7.1) et (7.2), est stocké sous forme compacte (tous les éléments différents de zéro, colonne par colonne) et demande alors deux pointeurs.

## RESULTATS NUMERIQUES

### EXEMPLE 1 : plaque plane $Re = 10^6$

sous-domaine "couche" :

15 éléments dans la direction normale à l'écoulement.  
 hauteur =  $0.5 \cdot 10^{-2}$  (chorde = 1)  
 maximum rapport largeur/hauteur d'un élément : 640  
 1993 inconnues sur un total de 4508

La fig. 1 montre le maillage général et la fig. 2 montre un zoom sur le bord d'attaque de la plaque.

Les figs. 3 y 4 montrent les profils de vitesse stationnaires obtenus pour  $Re=1.000.000$ , avec  $\Delta t=0.1$ ,  $\omega=1.7$ , et 5 cycles de couplage.

Les figs. 5 y 6 montrent les profils correspondants obtenus au même temps avec le code original. On remarque que ce dernier est incapable d'arriver à un état stationnaire, comme le montre la fig. 7, qui présente les histogrammes de convergence.

On a comparé la valeur numérique du coefficient de trainée avec ceux qui relèvent de la théorie de la couche limite :

$$C_d = 1.338/\sqrt{Re}$$

$C_d$		valeur calculé	valeur theorique
pour $Re=10^6$		$1.334 \cdot 10^{-3}$	$1.338 \cdot 10^{-3}$

ce qui montre une bonne corrélation.

### EXEMPLE 2 : profil NACA 0012 à incidence nulle - $Re = 10^5$

sous-domaine "couche" :

10 éléments dans la direction normale à l'écoulement.  
 hauteur =  $10^{-2}$  (chorde = 1)  
 maximum rapport largeur/hauteur d'un élément : 100  
 2060 inconnues sur un total de 3919

La fig. 8 et la fig. 9 montrent respectivement le maillage général et un zoom sur le bord d'attaque.

Le fig. 10 montre le profil de vitesse obtenu pour  $Re=100.000$ , avec  $\Delta t=0.1$ ,  $\omega=1.7$ , et 5 cycles de couplage. Le fig. 11 montre le profil correspondant obtenu au même temps avec le code original. Dans la fig. 12 on présente les histogrammes de convergence des deux codes. On voit une amélioration sur le code original.

### EXEMPLE 3 : profil NACA 0012 à incidence nulle - $Re = 10^6$

sous-domaine "couche" :

*for Lam. and Turb. Flows.* Venise 1981.

- [5] J.C. Le Balleur; "Viscid- inviscid coupling calculations for two and three-dimensional flows". *Von Karman Institute Lecture series*, 1982-04.
- [6] F. Hecht - B. Cardot; "Résolution des équations bidimensionnelles de Navier-Stokes". *Rapport Technique INRIA* n° 59. Septembre 1985.
- [7] F. Hecht; Base à divergence nulle pour les équations de Navier-Stokes these de doctorat 3eme cycle 1978.
- [8] O. Pironneau; "On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations". *Numerische Mathematik* 38,309-332 (1982).
- [9] Descriptions des structures des données Modulef. Rapport n° 2 (avril 1987).

MODULE :        derrico

capa8

22/09/88

capa8.nopo

1008    POINTS

3905    NOEUDS

945     ELEMENTS

945     QUADRANGLES

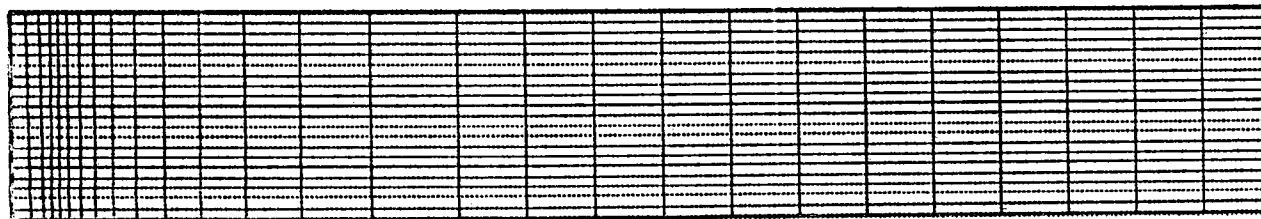
0       TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

-0.25       -1.4

COIN HAUT DROIT :

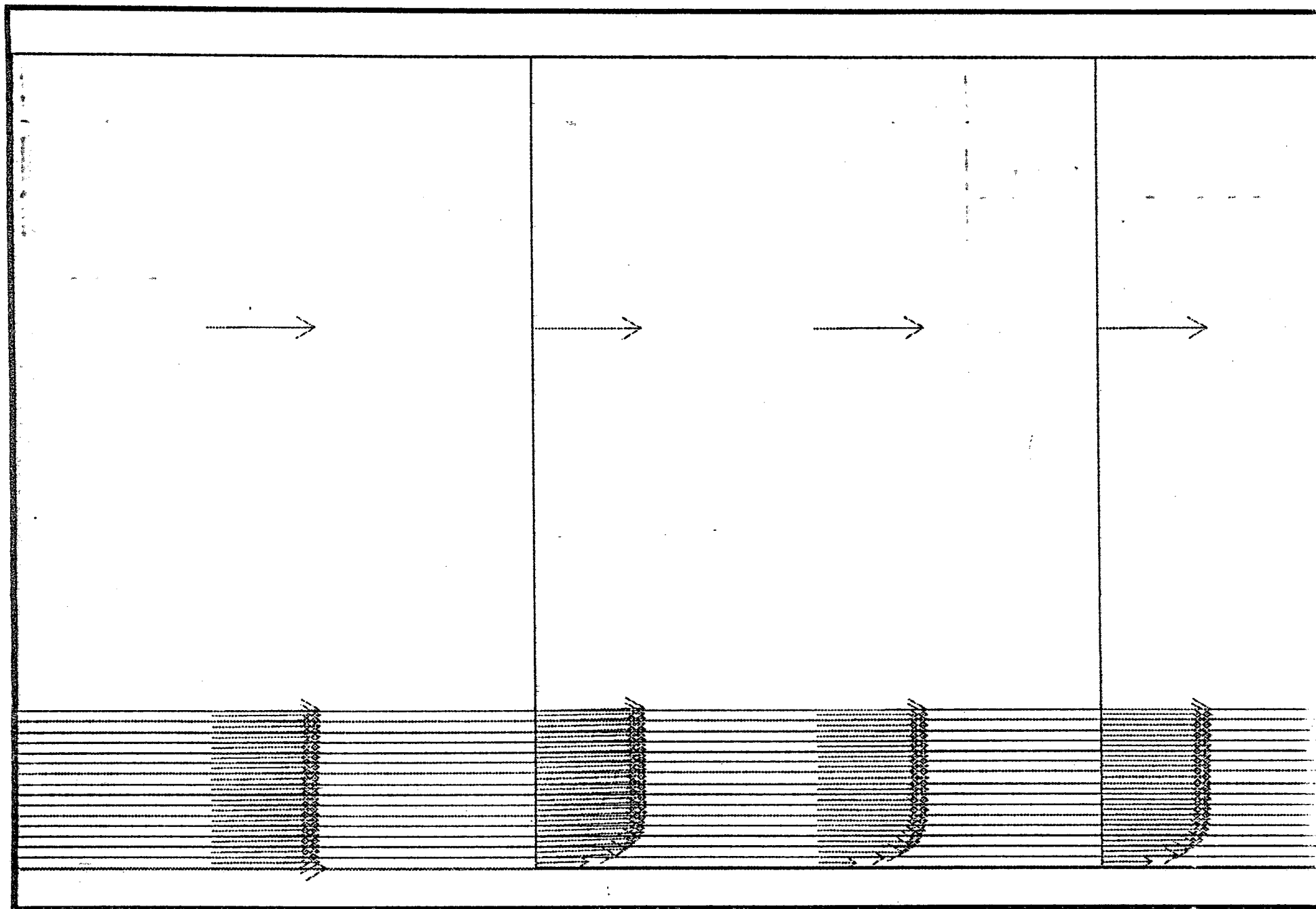
3.2         1.9



le 22:09:1988 a 15h 43mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

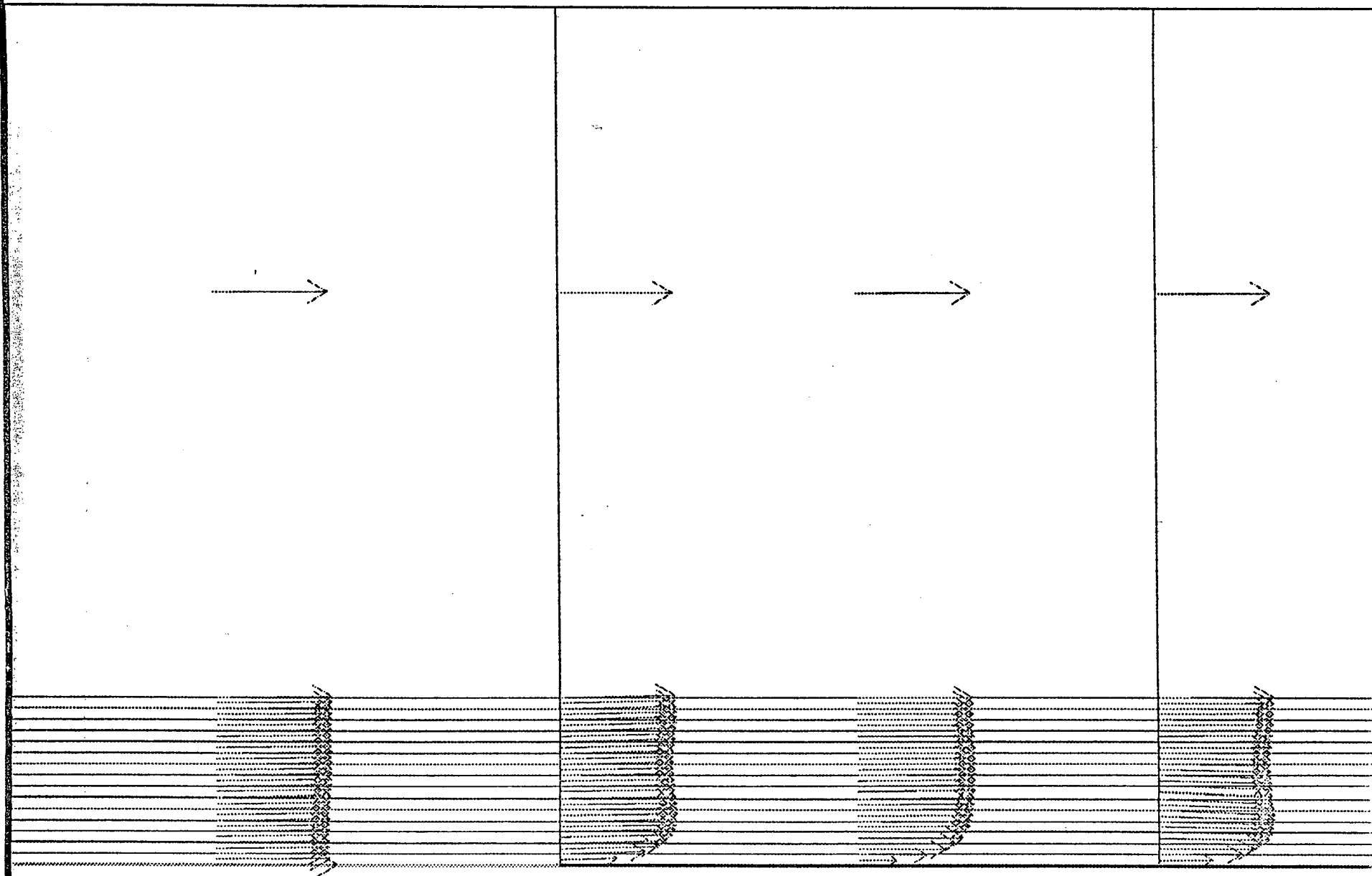
Fig. ①





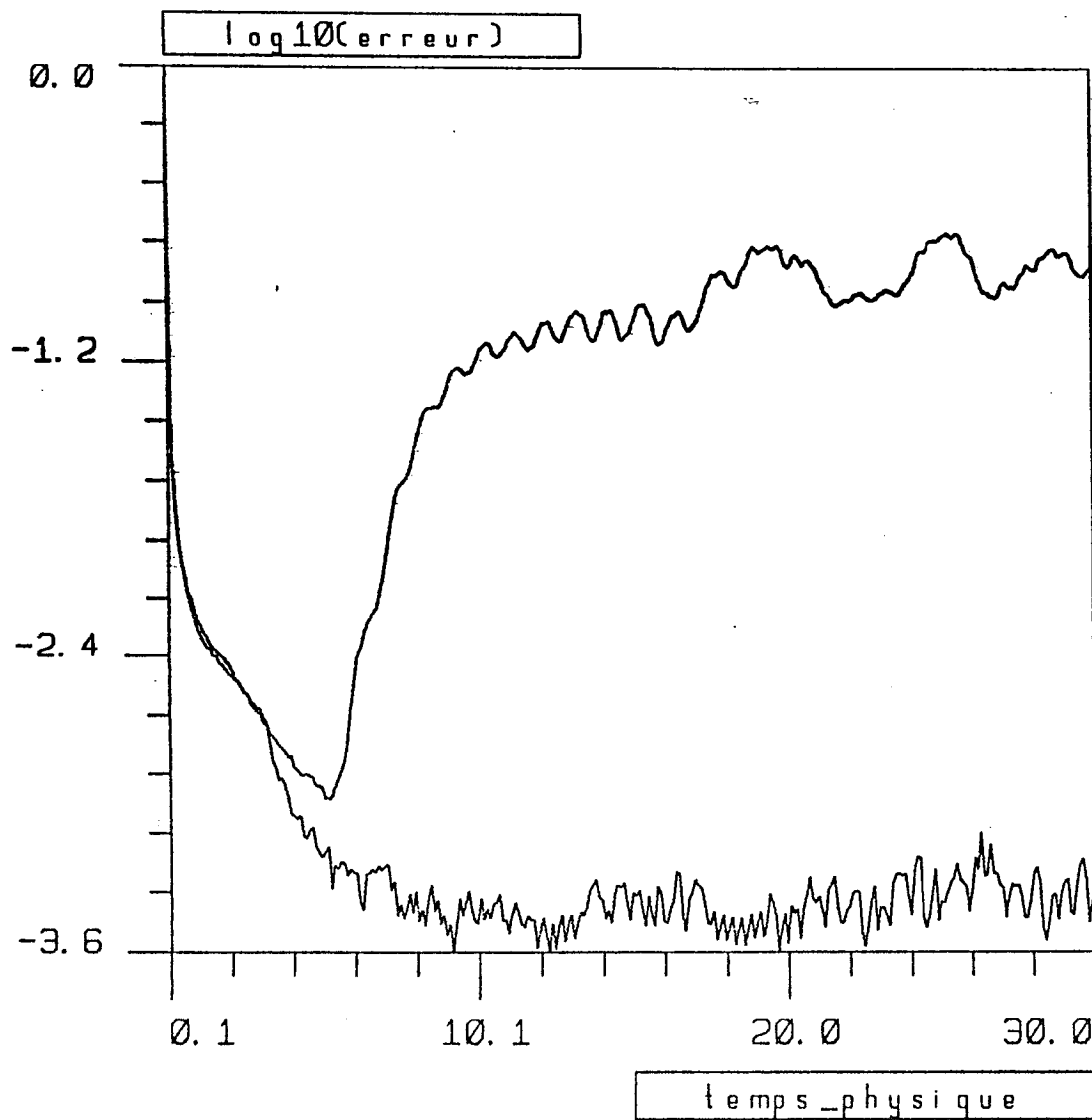
le 01:09:1988 a 13h 54mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. ③



le 01:09:1988 a 13h 58mn. dessin numero: 1. utilisateur: derricko

fig. (5)



MODULEF : derrico

19/09/88

converg

NOMBRE DE COURBES : 2

EXTREMA EN X :

0.10 30.

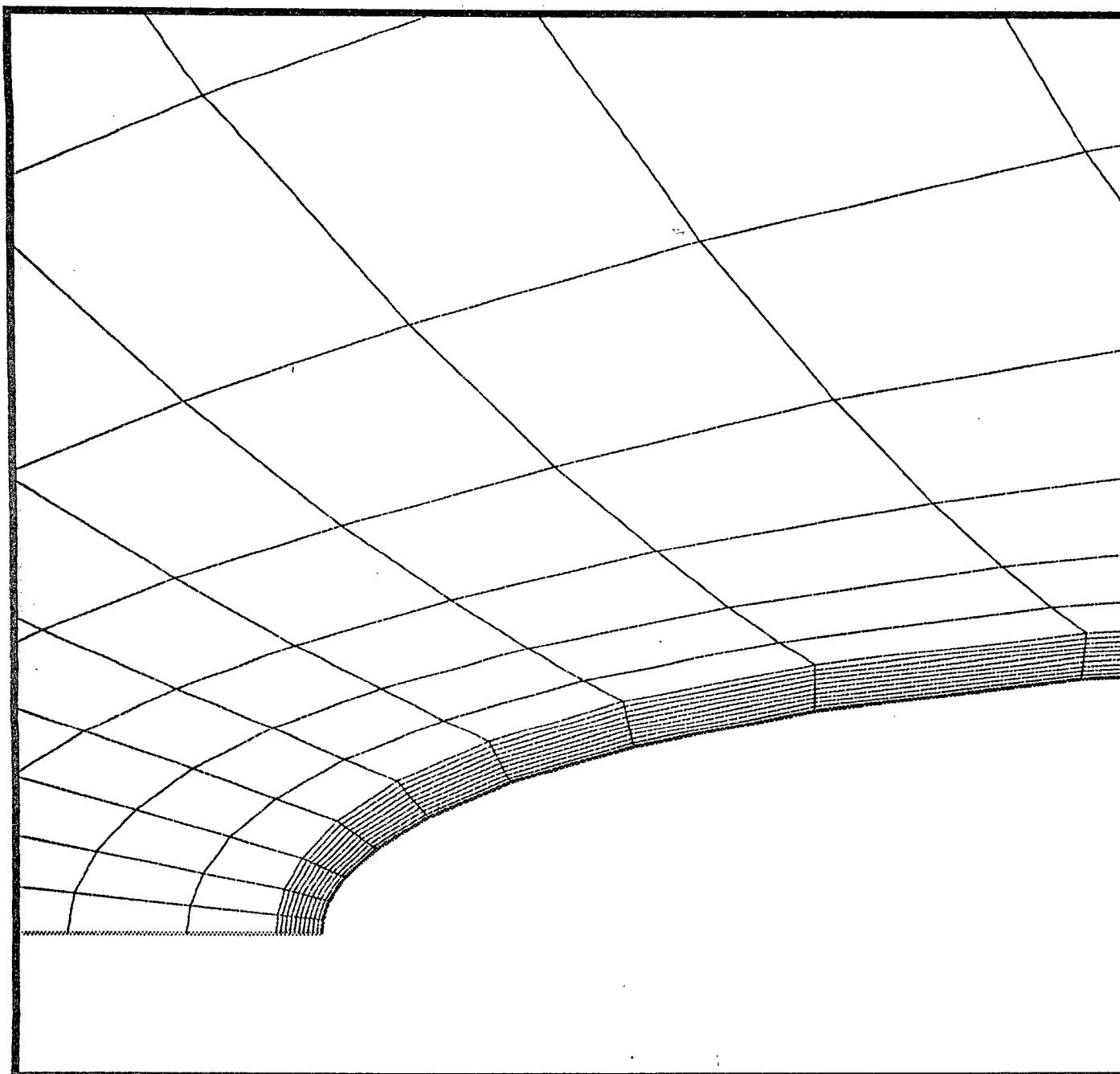
EXTREMA EN Y :

-3.6 0.00

— : code-modifie

— : code-original

TRACE DE COURBES



MODULEF :

GEMESH GEMESH GEMESH GEMESH GR

28/09/88

perf.nopo

861 POINTS

3321 NOEUDS

800 ELEMENTS

800 QUADRANGLES

0 TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

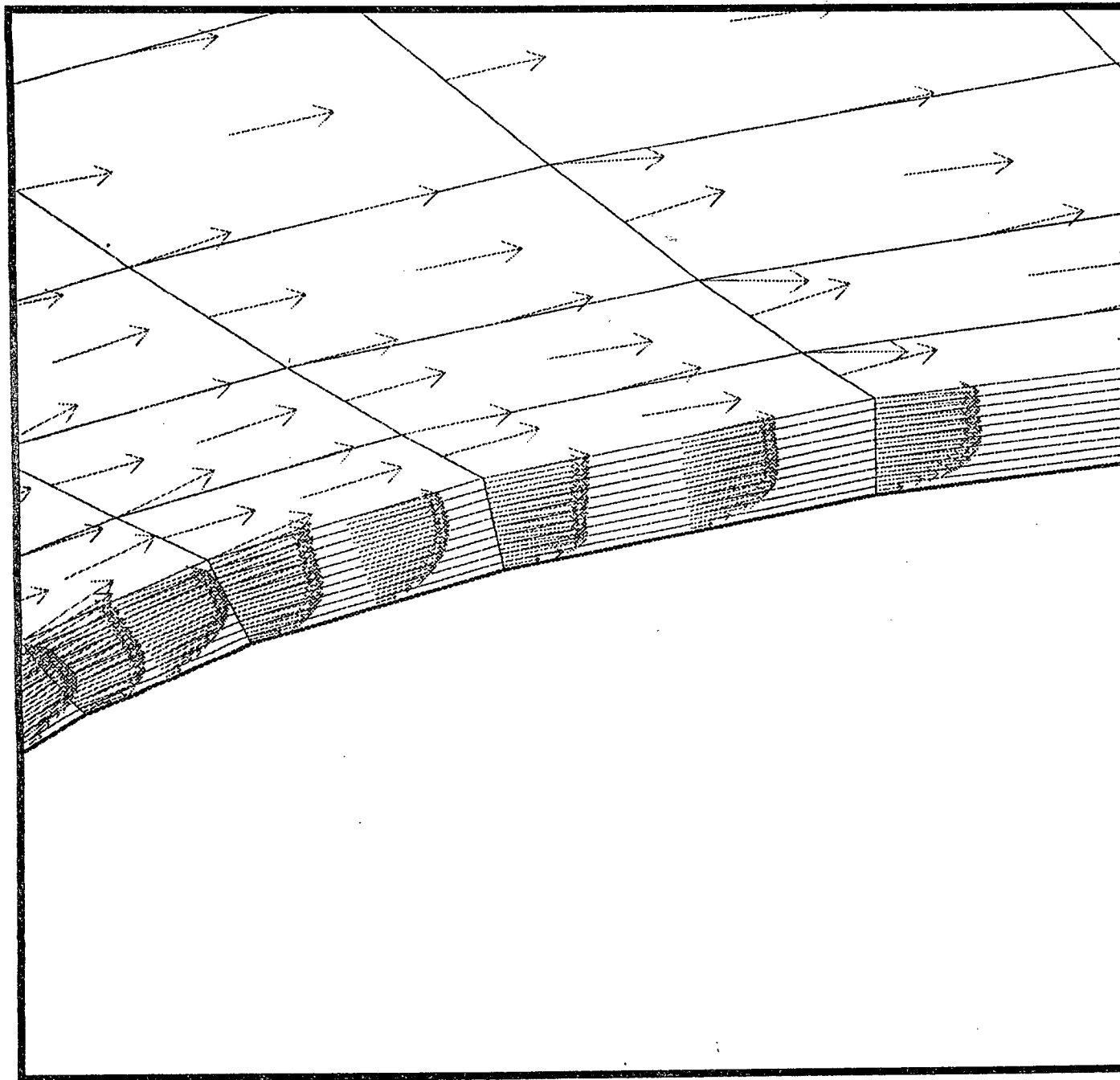
-0.67E-01 -0.30E-01

COIN HAUT DROIT :

0.18 0.20

le 28:09:1988 a 15h 46mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

Fig (9)



MODULEF : derrico

28/09/88  
perf.mail  
perf.coor  
perf.st5.2.v

861	POINTS
3321	NOEUDS
800	ELEMENTS
800	QUADRANGLES

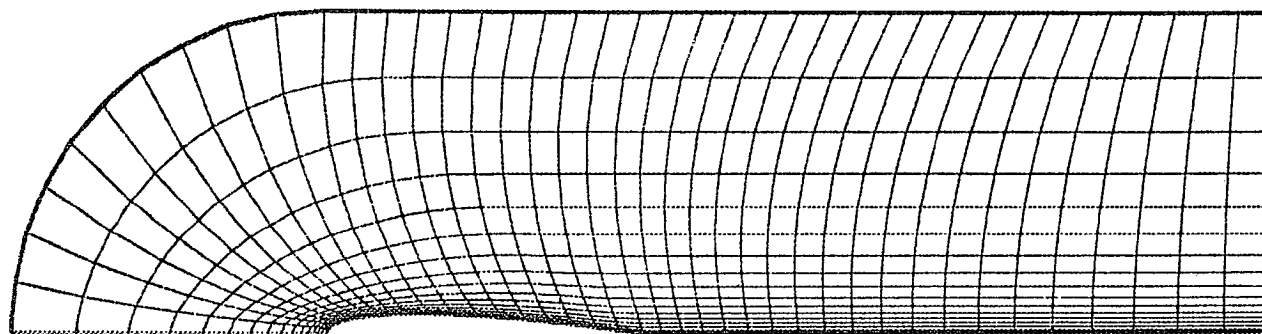
EXTREMA DU CHAMP B :  
0.00 1.2

ECHELLE :  
2.0 CM. = 1.2

VITESSES

le 28:09:1988 a 16h 03mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

Fig. (11)



MODULEF : derrico

perf2

28/09/88

perf2.nopo

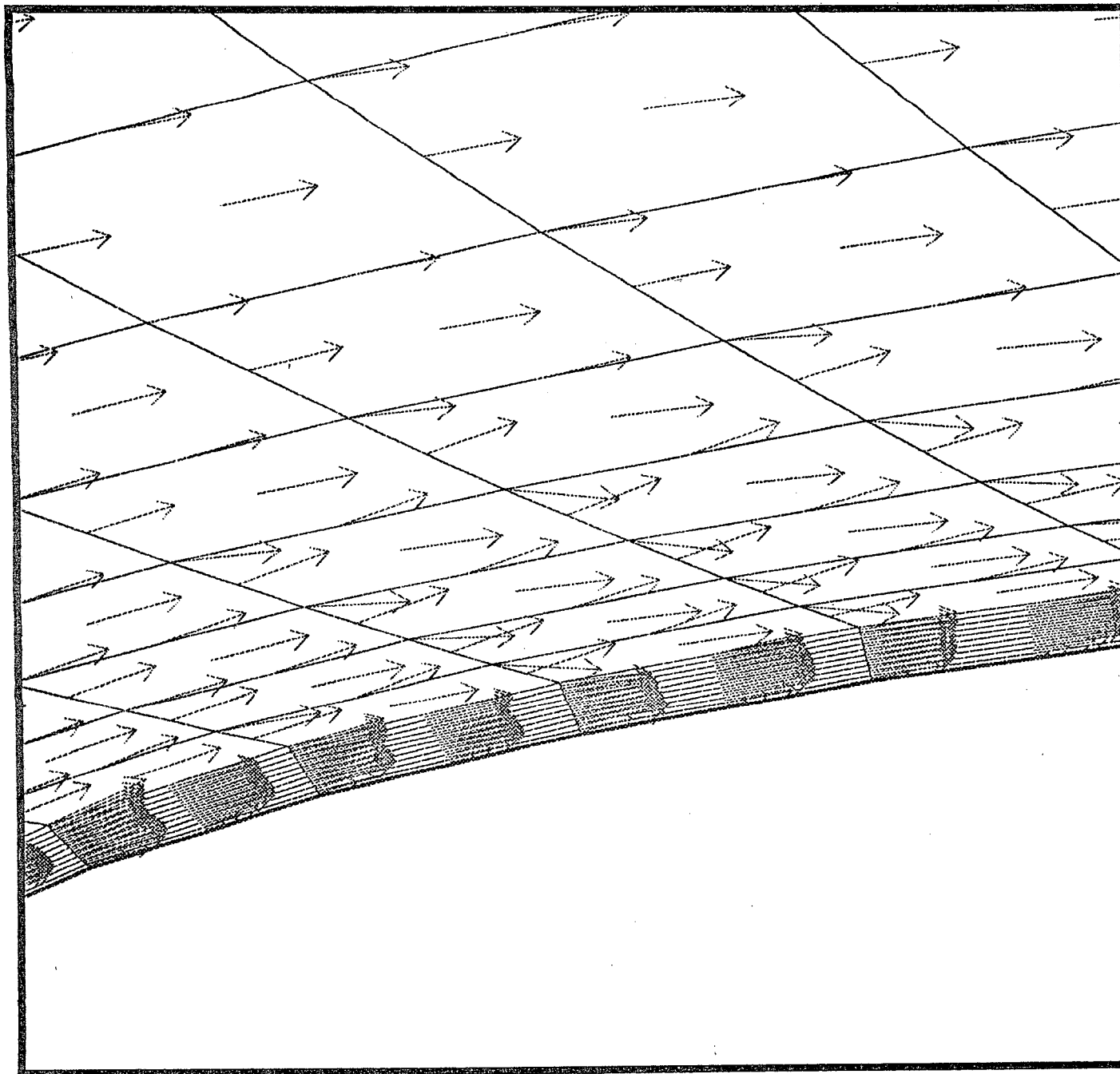
1066	POINTS
4131	NOEUDS
1000	ELEMENTS
1000	QUADRANGLES
0	TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

-1.2      -1.6

COIN HAUT DROIT :

3.2      2.6



MODULEF : derrico

28/09/88  
perf2.mail  
perf2.coor  
perf2.1.1.v

1066	POINTS
4131	NOEUDS
1000	ELEMENTS
1000	QUADRANGLES

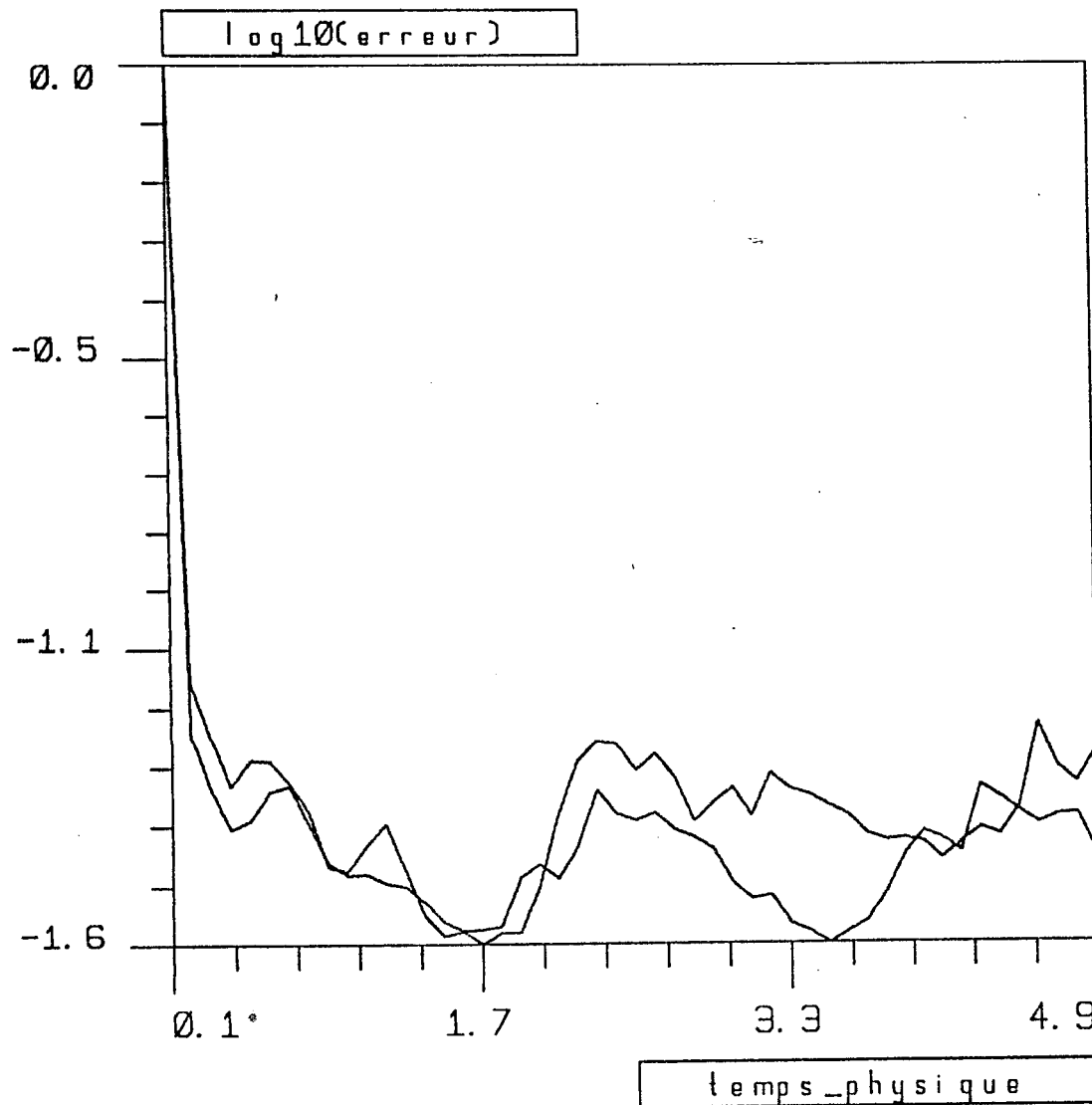
EXTREMA DU CHAMP B	:
0.00	1.2

ECHELLE	:
2.0	CM. = 1.2

VITESSES

le 28:09:1988 a 17h 56mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. (15)



MODULEF : derrico

28/09/88

converg

NOMBRE DE COURBES : 2

EXTREMA EN X :

0.10 4.9

EXTREMA EN Y :

-1.6 0.48E-10

— : code\_modifie  
- - : code\_original

TRACE DE COURBES

le 28:09:1988 a 17h 52mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

Fig. (17)



